

2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Point matériel P en mouvement
- Coordonnées cylindriques :

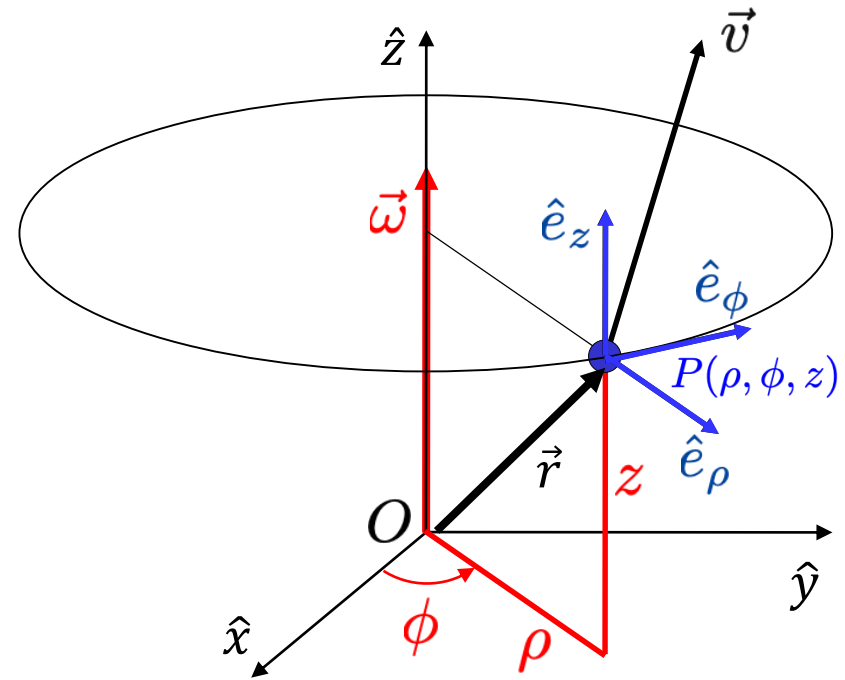
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) & \geq 0 \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[\\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées cylindriques du point P : $O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$

- Vitesse angulaire de rotation de la base: $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{z} = \dot{\phi} \hat{z}$

- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



$\vec{v} \cdot \hat{e}_\rho$ = vitesse radiale

$\vec{v} \cdot \hat{e}_\phi$ = vitesse transverse

$\vec{a} \cdot \hat{e}_\rho$ = accélération radiale

$\vec{a} \cdot \hat{e}_\phi$ = accélération transverse

2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Calcule avec formule de Poisson:

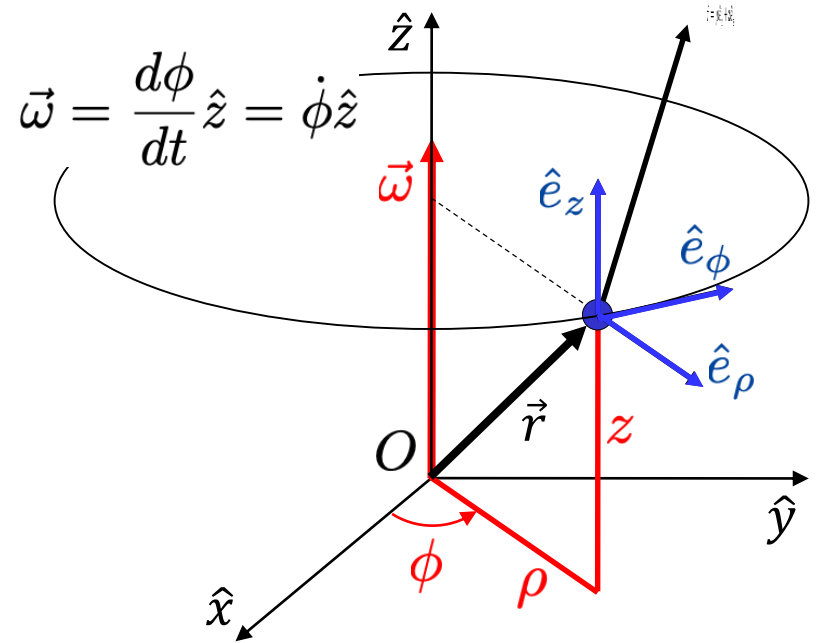
$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z + \dot{z} \dot{\hat{e}}_z = \\ &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + \ddot{z} \hat{e}_z = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



Application de la formule de Poisson
aux vecteurs de base

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho$$

$$\dot{\hat{e}}_z = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_z = 0$$

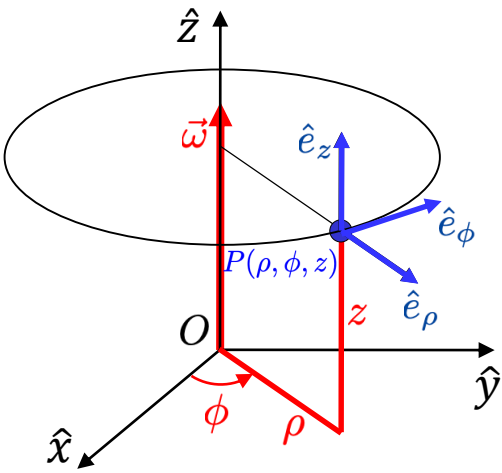
2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

repère fixe $\Rightarrow \dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \dot{\hat{z}} = 0$
 $\ddot{\hat{x}} = \ddot{\hat{y}} = \ddot{\hat{z}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) = \frac{d}{dt}(x \hat{x}) + \frac{d}{dt}(y \hat{y}) + \frac{d}{dt}(z \hat{z}) \\ &= \dot{x} \hat{x} + \underbrace{x \dot{\hat{x}}}_{=0} + \dot{y} \hat{y} + \underbrace{y \dot{\hat{y}}}_{=0} + \dot{z} \hat{z} + \underbrace{z \dot{\hat{z}}}_{=0} \\ &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} \end{aligned}$$



$x = \rho \cos \phi$	$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$	$\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho} \dot{\phi} \sin \phi - \rho \ddot{\phi} \sin \phi - \rho \dot{\phi}^2 \cos \phi$
$y = \rho \sin \phi$	$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi$	$\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho} \dot{\phi} \cos \phi + \rho \ddot{\phi} \cos \phi - \rho \dot{\phi}^2 \sin \phi$
$z = z$	$\dot{z} = \dot{z}$	$\ddot{z} = \ddot{z}$

Vecteurs du repère en coordonnées cylindriques:

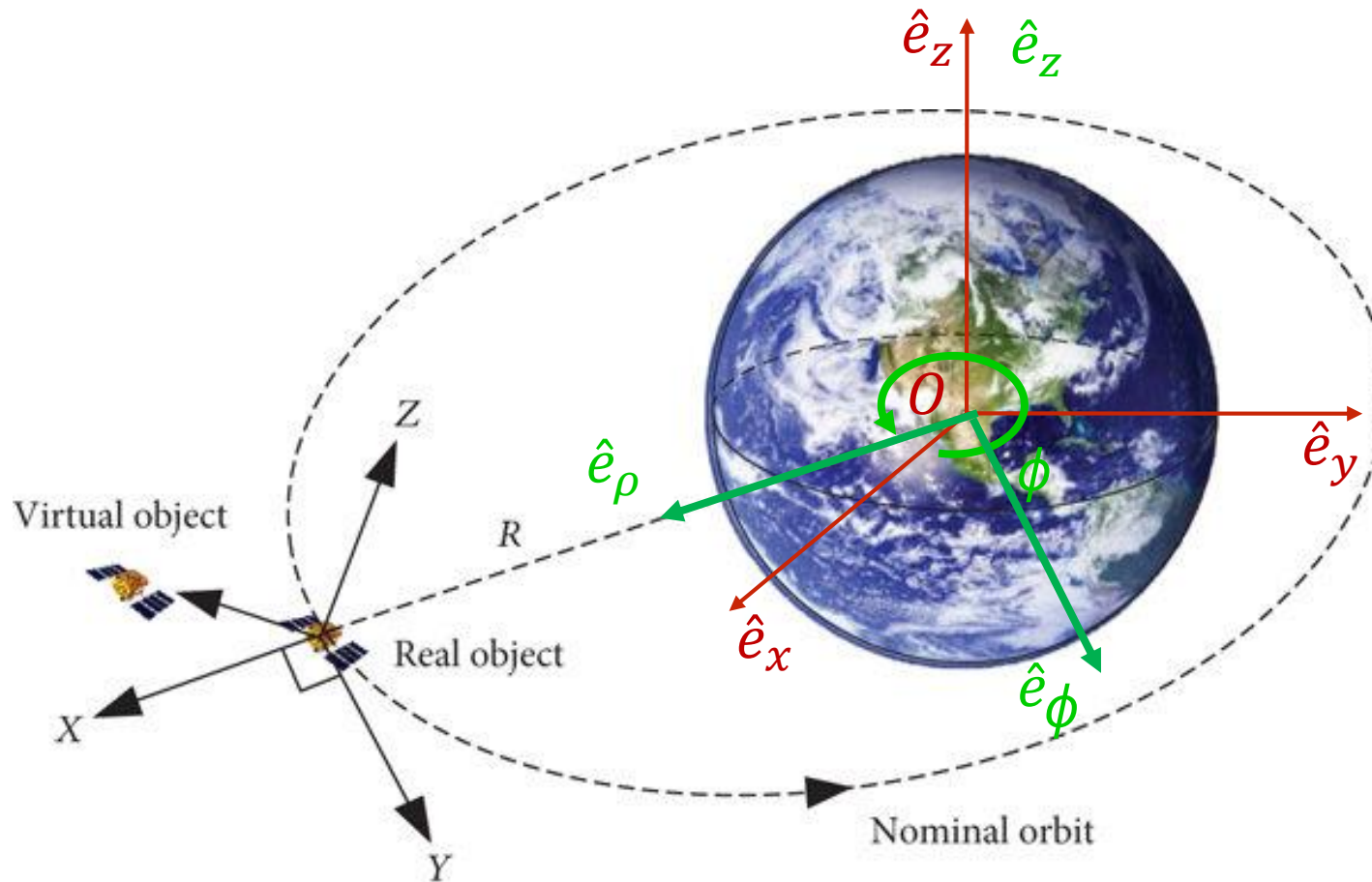
$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{y} &= \sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{z} &= \hat{e}_z \end{aligned}$$

→ voir document “Cinématique et systèmes de coordonnées” sur Moodle

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= \rho \cos \phi [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + \rho \sin \phi [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + z \hat{e}_z \\ &= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ &= (\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \dot{z} \hat{e}_z \\ &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} = (\ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho} \dot{\phi} \sin \phi - \rho \ddot{\phi} \sin \phi - \rho \dot{\phi}^2 \cos \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] \\ &\quad + (\ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho} \dot{\phi} \cos \phi + \rho \ddot{\phi} \cos \phi - \rho \dot{\phi}^2 \sin \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \ddot{z} \hat{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

2.2 Ex.: coordonnées cylindriques

mouvement d'un satellite autour de la Terre

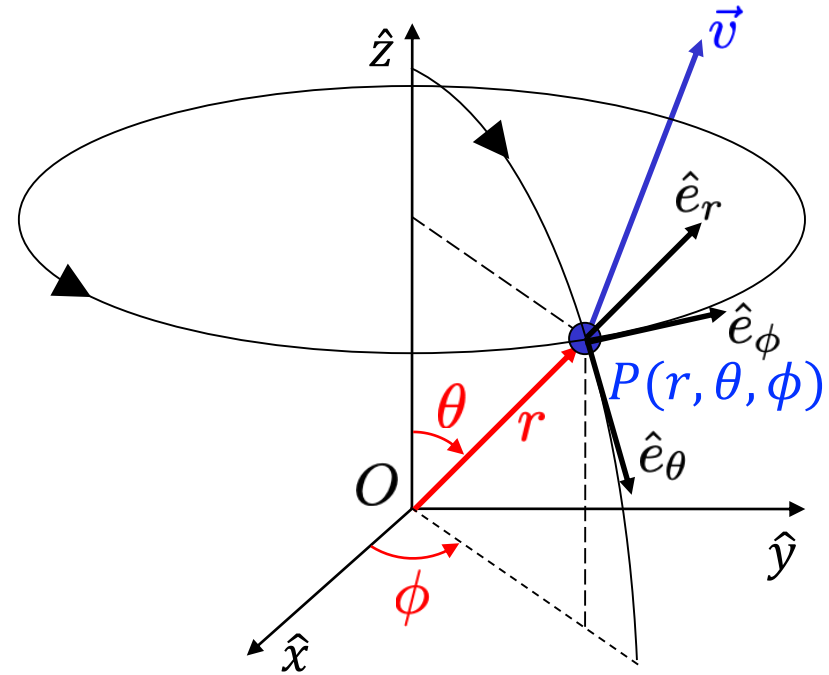


2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Point matériel P en mouvement
- Coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} r = r(t) & \geq 0 \\ \theta = \theta(t) & \in [0, \pi] \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées sphériques du point P: $O \hat{e}_r \hat{e}_\theta \hat{e}_\phi$



- Une rotation infinitésimale du vecteur \vec{r} est composée de
 - une rotation infinitésimale d'angle $d\phi$ autour de l'axe \hat{z} : $d\vec{r}_\phi = d\phi r \sin \theta \hat{e}_\phi = \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r}$
 - une rotation infinitésimale d'angle $d\theta$ autour de \hat{e}_ϕ : $d\vec{r}_\theta = d\theta r \hat{e}_\theta = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r}$

⇒ rotation infinitésimale totale :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\theta + d\vec{r}_\phi = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} \hat{z} \wedge \vec{r} = (\dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}) \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

- Vitesse angulaire de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques (suite)

- Vitesse angulaire de rotation du repère :

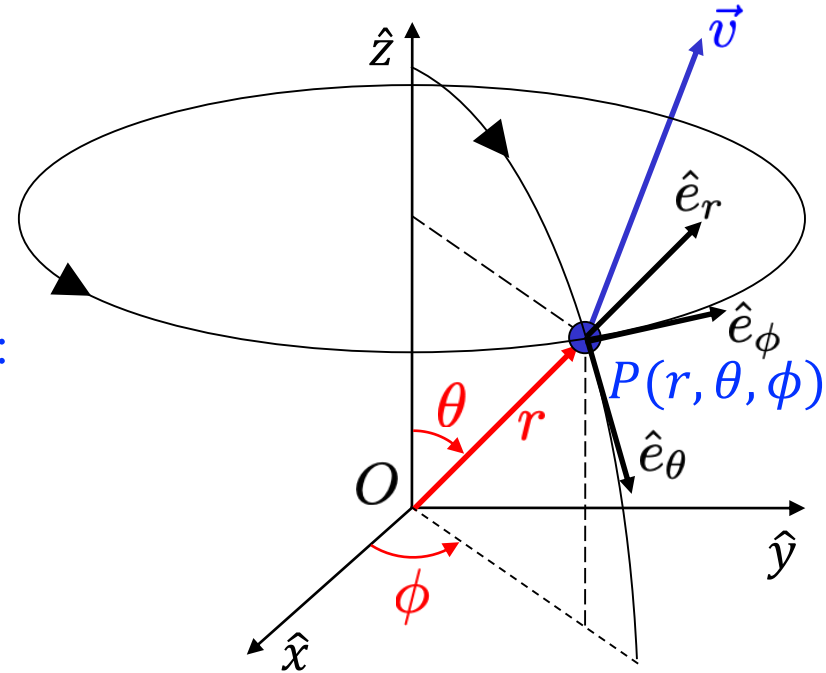
$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

- Formule de Poisson appliquée aux vecteurs de base :

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta$$



- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = & \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{e}_r \\ & + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

accélération radiale

accélération méridienne

accélération transverse

2.6 Contraintes et forces de liaison

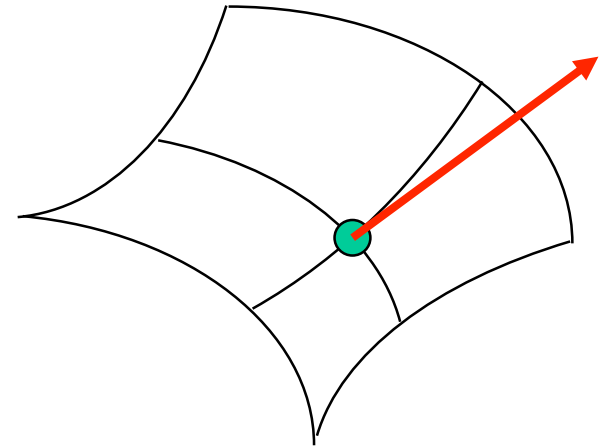
La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en **mouvement sous l'influence des actions mécaniques (ou forces)** qui leur sont appliquées

Déjà rencontrée: force de pesanteur et frottement avec l'air

- Point matériel restreint à se déplacer sur un support, par exemple une courbe ou une surface lisse (fixe ou en mouvement)

- Exemples:

- Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
- Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
- Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
- Bille dans un anneau en rotation



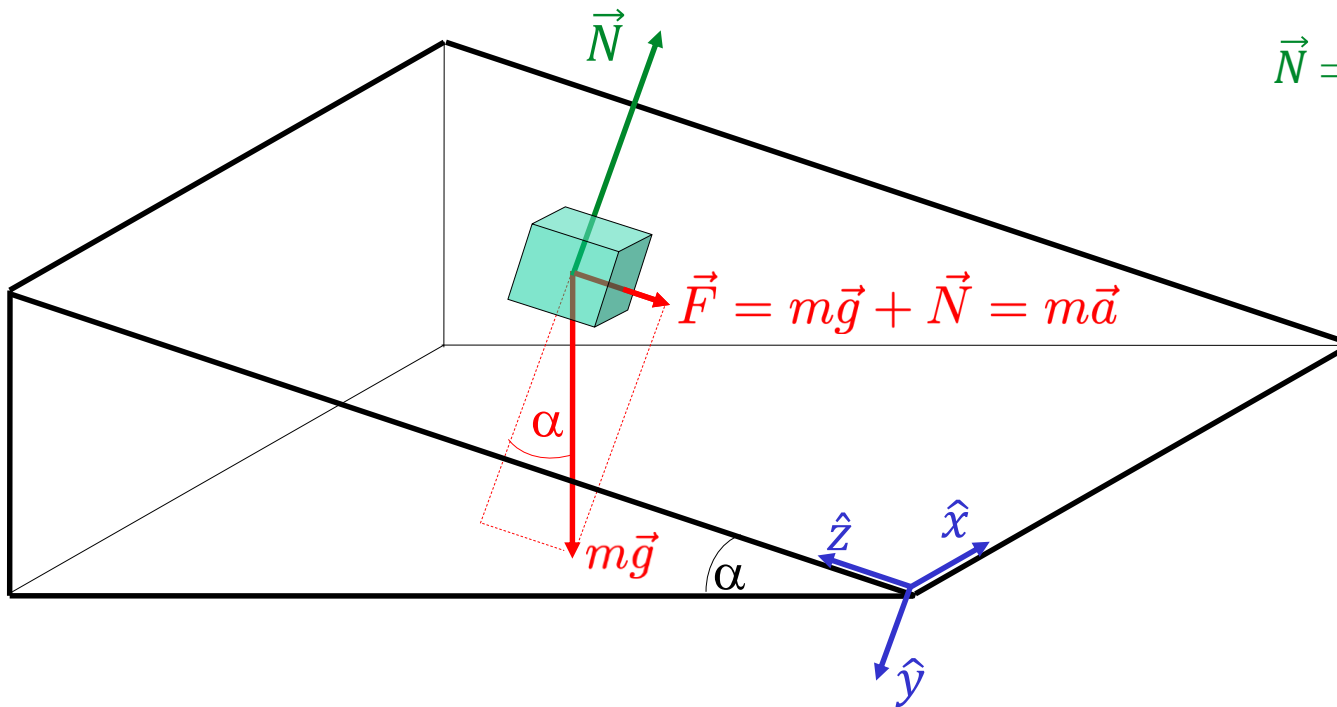
- **Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique**

- **toujours perpendiculaire au support**

- **la force de liaison devient nulle \Leftrightarrow la contrainte disparaît**

- Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
- Le force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre

2.6 Ex.: Plan incliné sans frottement



\vec{N} = force de « liaison » qui contraint le point matériel à rester sur le plan incliné (perpendiculaire au plan)

Projection sur axe x: $F_x = 0$
Projection sur axe y: $F_y = mg \cos \alpha - N = 0$
Projection sur axe z: $F_z = -mg \sin \alpha = ma_z$



$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \\y(t) &= 0; \quad N(t) = mg \cos \alpha \\z(t) &= z_0 - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

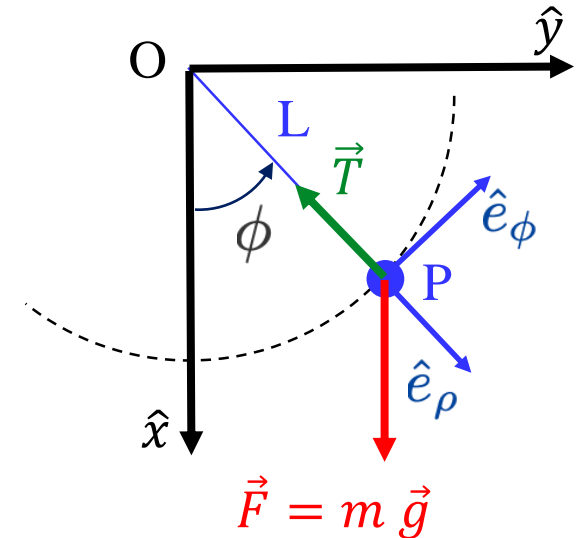
2.6 Ex.: le pendule mathématique

Une masse P, que on considère punctiforme, est attachée avec une ficelle de masse négligeable au point O.

On bouge la masse P tel que la ficelle forme un angle ϕ_0 avec la vertical à $t_0 = 0$.

A l'instant $t_0 = 0$ on laisse la masse P libre de osciller

La **contrainte ou force de liaison** est représentée par la ficelle. Si on part avec la ficelle tendue, la ficelle oblige la masse P à suivre un arc de circonférence (\vec{T} = **tension de la ficelle**)



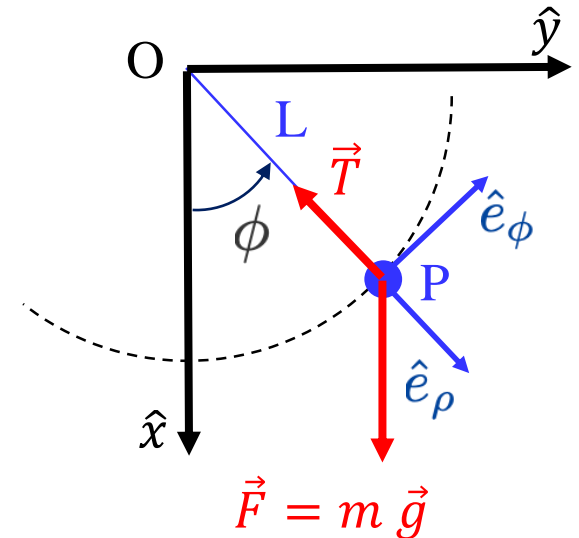
Quiz

- 1) Est ce que la période d'oscillation d'un pendule dépend de la masse?
- 2) Est-ce que la période d'oscillation dépende de l'angle initiale ?

2.6 Ex.: le pendule mathématique

On essaye de trouver la solution en utilisant le repère fixe

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}$



$$\begin{cases} \cos \phi \vec{T} \cdot \hat{x} + m \vec{g} \cdot \hat{x} = m \ddot{x} \\ \sin \phi \vec{T} \cdot \hat{y} = m \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T(t) \cos \phi + m g = m \ddot{x} \\ -T(t) \sin \phi = m \ddot{y} \end{cases}$$

Solution compliquée parce que la tension $T(t)$ et l'angle $\phi(t)$ sont des fonctions du temps

2.6 Ex.: le pendule mathématique

Galilée observe par premier que la période d'oscillation d'un pendule ne dépend pas de m

Repère cartésien fixe: $O \hat{x} \hat{y}$

Repère en rotation: $O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi$

2^{ème} loi de Newton $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

En coordonnées cylindriques $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$

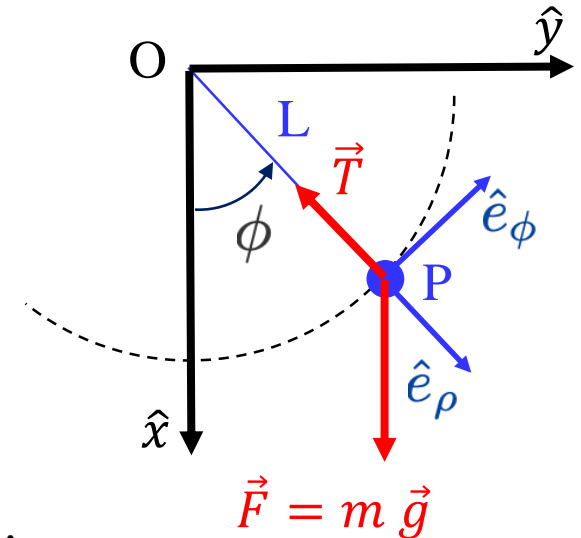
$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + m g \cos \phi = mL\dot{\phi}^2 \\ -m g \sin \phi = mL\ddot{\phi} \end{cases}$$

Le mouvement du pendule ne dépend pas de la masse $\Rightarrow -g \sin \phi = L\ddot{\phi}$

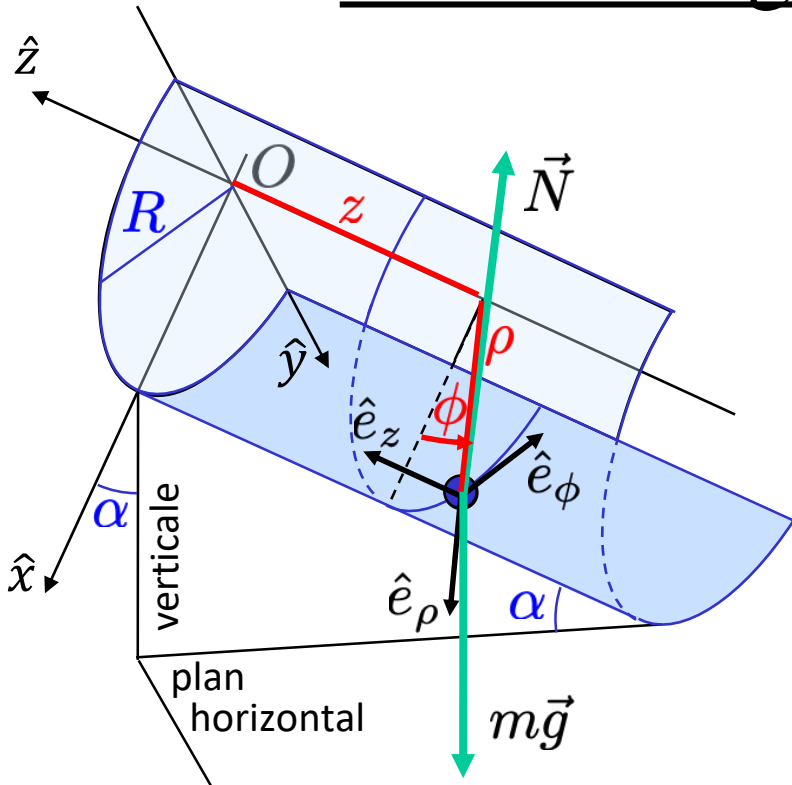
Pour des petites oscillations $\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \phi \sim \phi \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \phi$

Equation d'un oscillateur harmonique

$$\phi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ de période } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

Repère en rotation: $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$

Contrainte: la luge reste sur la piste $\rho = R \quad \dot{\rho} = 0 \quad \ddot{\rho} = 0$

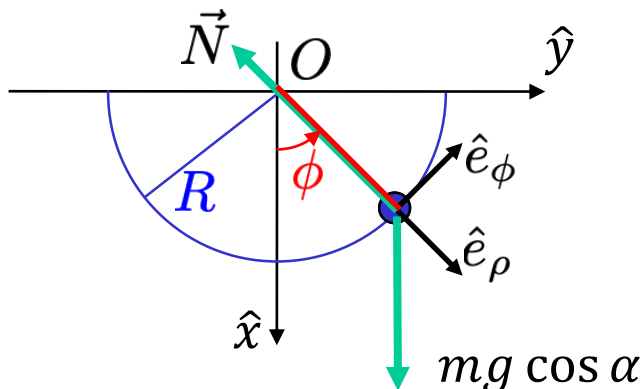
Pas de support en direction \hat{e}_ϕ ($\vec{N} \cdot \hat{e}_\phi = 0$) et \hat{e}_z ($\vec{N} \cdot \hat{e}_z = 0$)

En coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

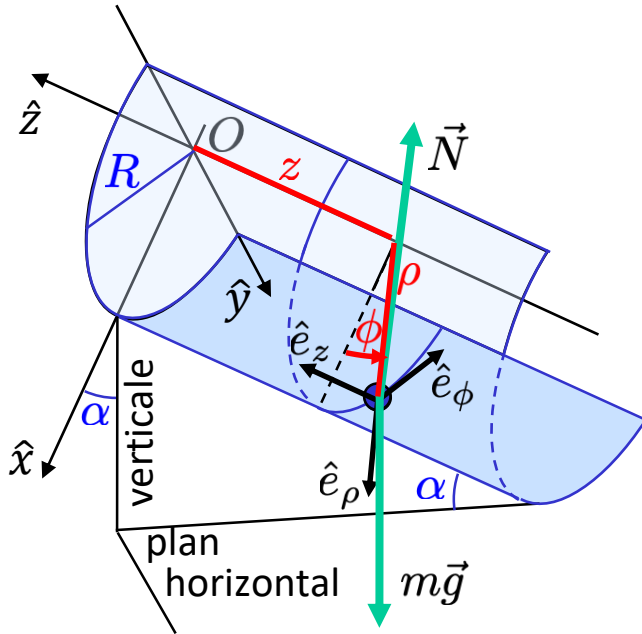
$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_z = m \ddot{z}\hat{e}_z \end{cases}$$

Projection $\perp \hat{z}$



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -mR\dot{\phi}^2 \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = mR\ddot{\phi} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} \end{cases}$$

2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -m R \dot{\phi}^2 & \text{eq. (1)} \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = m R \ddot{\phi} & \text{eq. (2)} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} & \text{eq. (3)} \end{cases}$$

eq. (3) \Rightarrow Mouvement uniformément accéléré

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

eq. (2) \Rightarrow Mouvement du pendule (petites oscil.)

$$\ddot{\phi} = -\phi \frac{g}{R} \cos \alpha$$

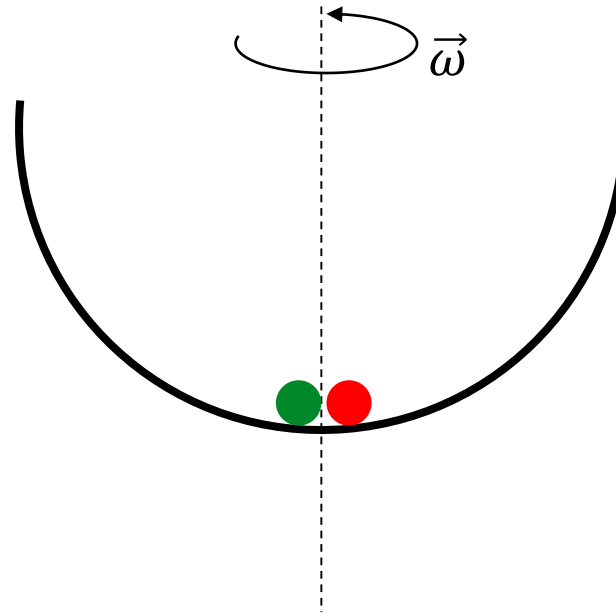
$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{R}}$$

eq. (1) \Rightarrow Réaction de la paroi de la piste en fonction du temps:

$$N(t) = m g \cos \alpha \cos \phi + m R \dot{\phi}^2$$

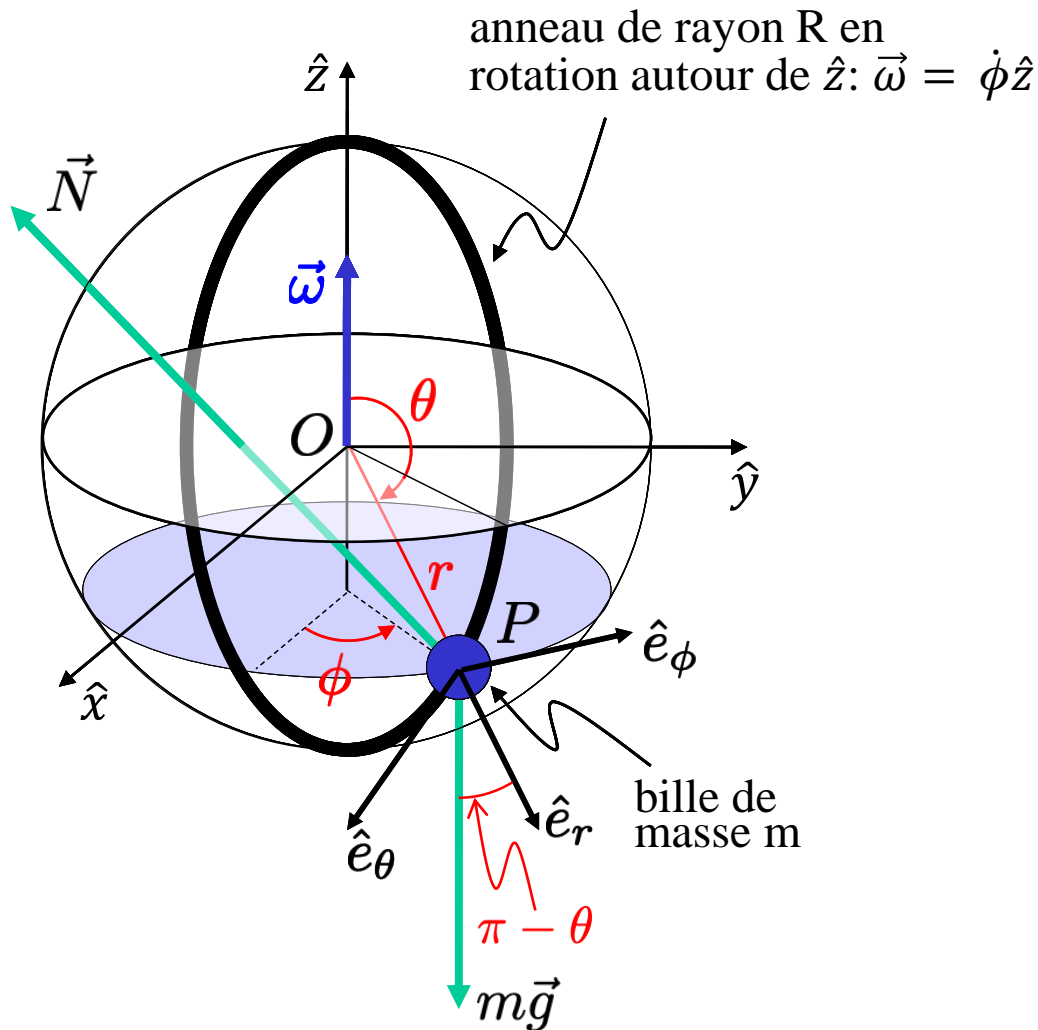
2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



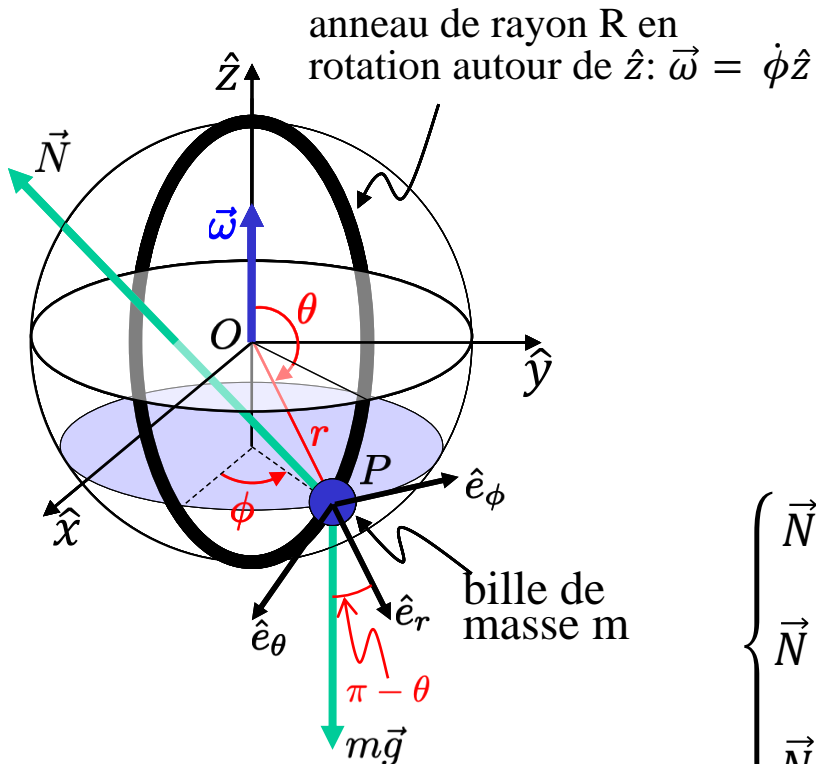
Deux balles de masse différente dans une glissière tournante: la quelle monte plus haut?

- 1) La plus légère
- 2) La plus lourde
- 3) identique

2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \vec{N} \cdot \hat{e}_r + m \vec{g} \cdot \hat{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\theta + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\phi + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi \end{cases}$$

bille en équilibre: $\dot{\theta} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$

Contraintes: $\dot{r} = 0$; $\ddot{r} = 0$; $\dot{\phi} = \omega$;
 $\ddot{\phi} = 0$; $\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$

$$\begin{cases} N_r - mg \cos \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ mg \sin \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Solutions possibles:

1) $\sin \theta = 0$ ($\Rightarrow \theta = 0$ ou π),

$N_r = mg$, bille sur l'axe vertical

2) $\cos \theta = -\frac{g}{r\omega^2}$, $\cos(\pi - \theta) = \frac{g}{r\omega^2} \leq 1 \Rightarrow$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}; \quad \omega \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$